Matematica Discreta e Algebra Lineare — 1° appello
A.A. 2014/15 — 9 giugno 2015

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con la matita.

Esercizio 1. Calcolare le soluzioni della seguente congruenza:

$$25x \equiv 2^{49} \pmod{17}.$$

Quante sono le soluzioni comprese tra 1 e 100?

$25 \equiv 8 \equiv 2^3 \ (17)$

$25x \equiv 2^{49} \ (17) \iff x \equiv 2^{46} \ (17)$

Calcoliamo il resto ~~della~~ di 2^{46} mod 17.

Dal piccolo Teorema di Fermat sappiamo che

ord $2 \mid 17-1=16$.

$2^0 \equiv 1 \quad 2^1 \equiv 2 \quad 2^2 \equiv 4 \quad 2^4 \equiv -1 \quad 2^8 \equiv 1$

$\Rightarrow$ ord $2 = 8$

$46 = 5 \cdot 8 + 6 \quad \Rightarrow 2^{46} \equiv 2^{8 \cdot 5 + 6} \equiv (2^8)^5 2^6 \equiv -4$

$\boxed{x \equiv -4 \quad (17)}$

o equivalentemente $x = -4 + 17k \quad k \in \mathbb{Z}$.

Calcoliamo quante sono le soluzioni tra 1 e 100

$1 \leq -4 + 17k \leq 100$

$\iff 5 \leq 17k \leq 104 \iff \frac{5}{17} \leq k \leq \frac{104}{17}$

ed essendo k intero $\iff 1 \leq k \leq 6$

Ci sono quindi 6 soluzioni tra 1 e 100

Esercizio 2. Siano $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$ e $B = \{1, 2, \ldots, 20\}$.
a) Quante sono le funzioni $f : A \to B$ iniettive?
b) Quante sono le funzioni $f : A \to B$ tali che l'immagine contiene solo numeri pari?
c) Quante sono le funzioni $f : A \to B$ strettamente crescenti?

a) $f\ A \to B$ è iniettiva $\iff \forall a_1 \neq a_2 \in A\ f(a_1) \neq f(a_2)$
cioè elementi distinti di A devono avere immagini distinte in B

$f(1) \quad f(2) \quad f(3) \quad \ldots \quad f(10)$
$\downarrow$ 20 scelte $\quad \downarrow$ 19 scelte $\quad \downarrow$ 18 scelte $\quad \downarrow$ 11 scelte

$\Rightarrow \#\{f\ A \to B \mid f \text{ è iniettiva}\} = 20 \cdot 19 \cdots 11 = \frac{20!}{10!}$

b) $\#\{f\ A \to B \mid f(A) \subset \{2, \ldots, 20\}\} = \#\{f\ A \to \{2, 4, \ldots, 20\}\}$
$= 10^{10}$ (per ognuno dei 10 el di A ho 10 possibili immagini)

c) f crescente $\Rightarrow f$ iniettiva $\Rightarrow \# f(A) = 10$
D'altra parte $\forall C \subseteq B \quad \# C = 10$
esiste un'unica funzione crescente $f\ A \to B$ t.che $f(A) = C$
(se $C = \{c_1, \ldots, c_{10}\}$ con $c_1 < c_2 < \ldots < c_{10}$ la funzione è quella definita da $f(i) = c_i$)
$\Rightarrow \#\{f\ A \to B \mid f \text{ crescente}\} = \#\{C \subseteq B \mid \#C = 10\}$
$= \binom{20}{10}$

Esercizio 3. Sia $C \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ la matrice

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Trovare una base di $U = \ker C$ e $W = \operatorname{im} C$. im=2pt ker=3pt

(b) Trovare delle equazioni (cartesiane) per W, cioè, scrivere W come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare con termine noto zero. 3pt

(a) Riducendo a scala, abbiamo

$$C \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivot nelle colonne 1,2 → le colonne 1,2 di C contengono una base di Im C:

$$\boxed{\text{Base di } W: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Variabili x_3, x_4 libere: $\ker C = \left\{ \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$

$$\boxed{\text{Base di } U: \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

b) Imponiamo che un vettore generico sia in $\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -1 & z-x \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-x+y \end{bmatrix}$$

Equazioni: $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : z-x+y=0 \right\}$

Esercizio 4. Sia $B \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Dimostrare che $\lambda_1 = 1$ è un autovalore di B con molteplicità geometrica 3 e che questo permette di dire che il polinomio caratteristico si fattorizza come prodotto di polinomi di grado 1. 3pt

(b) Dire se esiste un altro autovalore di B diverso da 1. [Suggerimento: non occorre calcolare il polinomio caratteristico per rispondere, ci sono metodi molto più veloci.] La matrice B è diagonalizzabile? 3pt no f1: -1 2pt

a) Basta verificare che $\mathrm{Ker}\, B - I = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ha dimensione 3, che è vero perché la matrice ridotta a scala ha un solo pivot.

La molteplicità algebrica di $\lambda_1 = 1$ è almeno 3,

quindi $p_B(\lambda) = (\lambda - 1)^3 (\lambda - \lambda_2)$ oppure $p_B(\lambda) = (\lambda - 1)^4$ per qualche $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

λ_2 dev'essere reale perché gli autovalori complessi vengono in coppie coniugate.

b) La traccia di B $\mathrm{Tr}\, B = 8$, è uguale alla somma degli autovalori con la loro molteplicità algebrica,

quindi dev'essere $\mathrm{Tr}\, B = 3 \cdot 1 + \lambda_2$, da cui $\lambda_2 = 5$.

(difatti $\mathrm{Ker}\, B - 5I = \mathrm{Span} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$). $m_a(\lambda_1) = m_g(\lambda_1) = 3$

$m_a(\lambda_2) = m_g(\lambda_2) = 1$

quindi B è diagonalizzabile.

Oppure: B è simmetrica. Matrici simmetriche sono <u>sempre</u> diagonalizzabili.